הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 2מ1 — 104043

מבחן סוף סמסטר מועד א', אביב - 02.09.24

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 6 שאלות בחירה מרובה. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה.
משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתון כי $|\overline{n}| = 3,\ |\overline{m}| = 4$ וכי הזווית בין הווקטורים $\overline{n},\ \overline{m} \in \mathbb{R}^3$ היא $\frac{\pi}{3}$.
נגדיר $\overline{a} = \overline{m} - \overline{n},\ \overline{b} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$. אז השטח של המשולש ששתיים מצלעותיו הם $\overline{a}, \overline{b}$ הוא

(א) $2\sqrt{3}$

(ב) $4\sqrt{2}$

(ג) 2

(ד) $3\sqrt{3}$***

(ה) $6\sqrt{2}$

2. האינטגרל הכפול

$$\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy \right) dx$$

שווה ל-

(א) $\frac{-1-\pi}{2\pi}$

(ב) $\frac{-4-3\pi^2}{2\pi^3}$***

(ג) $\frac{6+5\pi^2}{2\pi^2}$

(ד) $\frac{2-\pi}{2\pi^3}$

(ה) $\frac{-5-3\pi^2}{2\pi}$

3. האינטגרל המשולש

$$\iiint_V |z| dxdydz$$

כאשר

$$V = \{(x,y,z) |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ x^2 + y^2 \geq 4\}$$

שווה ל-

(א) $\frac{\pi}{2}$ * **

(ב) $\frac{2\pi}{3}$

(ג) $\frac{3\pi}{2}$

(ד) $\frac{4\pi}{3}$

(ה) $\frac{\pi}{3}$

4. מטייל עומד בנקודה $(1,-1,1)$ על הר שצורתו $xyz+3xy^2z+xyz^3=1$. הוא מחליט לנוע משם על ההר בדרך בה קצב שינוי הגובה הוא מינימלי. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

(א) $(4,2,-51)$

(ב) $(1,-1,-1)$

(ג) $(-2,8,-34)$***

(ד) $(-2,-1,-5)$

(ה) $(-1,-2,-5)$

5. האינטגרל המשטחי מסוג ראשון

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z\right)\,d\sigma$$

כאשר

$$S=\{(x,y,z)|\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z\le 1\}$$

הוא

(א) $\frac{\sqrt{2}\cdot 7\pi}{6}$***

(ב) $\frac{5\pi}{12}$

(ג) $\frac{\sqrt{2}\cdot 9\pi}{10}$

(ד) $\frac{\pi}{8}$

(ה) $\frac{10\pi}{3}$

6. העבודה (אינטגרל קווי מסוג שני) של השדה

$$\overline{F}(x,y)=\left(e^x\cos y-2y,e^{y^3}-1-e^x\sin y\right)$$

לאורך העקום

$$L=\{(x,y)|\ |x|+|y|=1,\ y\ge 0\}$$

מהנקודה $(-1,0)$ אל הנקודה $(1,0)$ היא

(א) 0

(ב) $\frac{e^2+e-1}{e}$

(ג) $\frac{e^2-2e-1}{e}$***

(ד) $\frac{e^2+2e-1}{e}$

(ה) $\frac{e^2+4e-1}{e}$

חלק ב'

יש לרשום <u>בעמודים הבאים</u> פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

7. (26 נקודות)

(א) (13 נקודות)
מיצאו ומיינו (סווגו) את הנקודות הקריטיות של

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

פתרון: הפונקציה היא פולינום ולכן גזירה ברציפות ולכן הנקודות הקריטיות שלה הן הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$$
$$f'_y(x,y) = 6xy - 12$$

ולכן

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$
$$f'_y(x,y) = 6xy - 12 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$
$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 + 4 = 5x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1, 4 \Rightarrow x = \pm 1, \pm 2$$

ולכן הנקודות הקריטיות הן

$$(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1).$$

הפונקציה היא פולינום ולכן גזירה פעמיים ברציפות ולכן נשתמש בהסיאן כדי למיין את הנקודות הקריטיות:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

עבור הנקודה $(1,2)$:

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(1,2) = 6^2 - 12^2 < 0$$

ולכן $(1,2)$ נקודת אוכף.
עבור הנקודה $(-1,-2)$:

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(-1,-2) = (-6)^2 - (-12)^2 < 0$$

ולכן $(-1,-2)$ נקודת אוכף.
עבור הנקודה $(2,1)$:

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(2,1) = 12^2 - 6^2 > 0,\ f''_{xx}(2,1) = 12 > 0$$

ולכן $(2,1)$ נקודת מינימום מקומי.
עבור הנקודה $(-2,-1)$:

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(-2,-1) = (-12)^2 - (-6)^2 > 0,\ f''_{xx}(2,1) = -12 < 0$$

ולכן $(-2,-1)$ נקודת מקסימום מקומי.

(ב) (13 נקודות)
יהי

$$D = \{(x,y) |\, x^2 + xy + y^2 \le 6\}.$$

ידוע כי D סגורה וחסומה.
הוכיחו כי יש ל- $g(x,y) = xy$ ערך מינימלי וערך מקסימלי ב- D ומיצאו ערכים אלו ואת הנקודות בהן הן מתקבלות.

פתרון: g היא פולינום ולכן רציפה בכל נקודה ו- D סגורה וחסומה ולכן לפי משפט וויארשטראס יש ל- g מינימום ומקסימום ב- D.
כיוון ש- g היא פולינום אז היא גזירה ברציפות בכל נקודה ובפרט בכל נקודה פנימית של D ולכן הנקודות הקריטיות של g הן כל הנקודות הפנימיות של D בהן הגרדיאנט של g מתאפס:

$$\overline{\nabla} g(x,y) = (y,x) \Rightarrow \overline{\nabla} g(x,y) = (y,x) = (0,0) \iff x = y = 0$$

הנקודה $(0,0)$ מקיימת $0 = 0^2 + 0 \cdot 0 + 0^2 \le 6$ ולכן היא נקודה קריטית.
נסתכל כעת על הנקודות עבורן $x^2 + xy + y^2 = 6$: נגדיר $h(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6$. אז g, h פולינומים ולכן גזירים ברציפות בכל נקודה ובנוסף

$$\overline{\nabla} h(x,y) = (2x + y, x + 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$$

והנקודה $(0,0)$ לא מקיימת $h(x,y) = 0$ ולכן אינה נקודת קיצון תחת האילוץ $h = 0$.
לכן אנו יכולים להשתמש בכופלי לגרנג':

$$\begin{aligned} y + \lambda(2x + y) = 0 &\iff 2\lambda x + (1+\lambda) y = 0 \\ x + \lambda(x + 2y) = 0 &\iff (1+\lambda) x + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

ועבור λ קבוע, זוהי מערכת לינארית:

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - (1+\lambda)^2 = 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = (3\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

במקרה שהדטרמיננט שונה מאפס, הפתרון היחיד הוא $x = y = 0$ שאינו מקיים את האילוץ.
לכן נטפל במקרים בהם הדטרמיננט מתאפס: $\lambda = 1$: במקרה זה המערכת היא

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

שנותן כי $y = -x$ וע"י הצבה באילוץ נקבל כי

$$6 = x^2 + x(-x) + (-x)^2 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{6}$$

ונקבל את הנקודות $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}), (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.
$\lambda = -\frac{1}{3}$: במקרה זה המערכת היא

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y &= 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y &= 0 \end{aligned}$$

שנותן כי $y = x$ וע"י הצבה באילוץ נקבל כי

$$6 = x^2 + x \cdot x + (-x)^2 = 3x^2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

ונקבל את הנקודות $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$g(0,0) = 0,\ \underbrace{g(\sqrt{2},\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 2}_{\text{מקסימום ונקודות מקסימום}},\ \underbrace{g(\sqrt{6},-\sqrt{6}) = g(-\sqrt{6},\sqrt{6}) = -6}_{\text{מינימום ונקודות מינימום}}$$

8. (26 נקודות)

(א) (13 נקודות)
חשבו את השטף (אינטגרל משטחי מסוג שני) של

$$\overline{F}(x,y,z)=\left(3x^2y, e^{x^2z}+2y-\cos z^2, -6xyz+x^2+y^2\right)$$

דרך המשטח

$$S=\{(x,y,z)|\ z=4-x^2-y^2,\ z\geq 2\}$$

כאשר ל-S ניתנת האוריינטציה בה לנורמל רכיב z שלילי.

פתרון: נגדיר את המשטח

$$S_1=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\leq 2,\ z=2\}$$

עם האוריינטציה כלפי מטה. בנוסף נגדיר

$$V=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\leq 2,\ 2\leq z\leq 4-x^2-y^2\}.$$

אז $\partial V=-S+S_1$ כאשר האוריינטציה החיובית על ∂V מתאימה לזו של $-S+S_1$.
בנוסף $\overline{F}$ שדה גזיר ברציפות כי הרכיבים שלו גזירים ברציפות מכיוון שהם הרכבות של פולינומים עם פונקציות גזירות ברציפות במשתנה אחד. בנוסף

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{F}=6xy+2-6xy=2.$$

לפי משפט גאוס

$$\oiint\limits_{\partial V=-S+S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\iiint\limits_V 2dxdydz$$

וכיוון ש-

$$\oiint\limits_{-S+S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma=-\iint\limits_S\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma+\iint\limits_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma$$

אז

$$\iint\limits_S\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\iint\limits_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma-\iiint\limits_V 2dxdydz.$$

$$\iiint\limits_V 2dxdydz=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\left(\int\limits_2^{4-x^2-y^2}1dz\right)dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\left(2-x^2-y^2\right)dxdy\underset{\text{פולריות}}{=}$$

$$=\ 2\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)rdr\right)d\theta=4\pi\left(r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=4\pi.$$

עבור S_1 ניקח את הפרמטריזציה הסטנדרטית $\overline{r}(x,y)=(x,y,2),\ x^2+y^2\leq 2$ ועבורה $\overline{r}'_x(x,y)\times\overline{r}'_y(x,y)=(0,0,1)$ וזו האוריינטציה ההפוכה לזו שבחרנו עבור S_1 ולכן

$$\iint\limits_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}(?,?,-12xy+x^2+y^2)\cdot(0,0,1)dxdy=$$

$$=\ -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\left(-12xy+x^2+y^2\right)dxdy\underset{\text{פולריות}}{=}-\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(-12r^3\cos\theta\sin\theta+r^3\right)dr\right)d\theta=-2\pi.$$

לכן

$$\iint\limits_S\overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma=-2\pi-4\pi=-6\pi.$$

(ב) (13 נקודות) חשבו את העבודה (אינטגרל קווי מסוג שני) של השדה הוקטורי

$$\overline{G}(x,y,z) = \left(e^{-x^2} - y + 2z, 3x + \cos\left(y^2\right) + 4z, 2x - y + \arctan z^2\right)$$

לאורך העקום

$$L = \{(x,y,z)|\ x = z,\ x^2 + y^2 = 5\}$$

כאשר ל-L ניתנת האוריינטציה שהיא נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מלמעלה.

פתרון: נסתכל על המשטח

$$S = \{(x,y,z)|\ x^2 + y^2 \leq 5,\ x = z\}$$

עם האוריינטציה כלפי מעלה (כלומר רכיב z חיובי).
אז $L = \partial S$ והאוריינטציה הנתונה על L היא האוריינטציה החיובית ביחס לאוריינטציה על המשטח S.
בנוסף, $\overline{F}$ גזיר ברציפות כי הרכיבים שלו גזירים ברציפות מכיוון שהם הרכבות של פולינומים עם פונקציות גזירות ברציפות במשתנה אחד.
לכן, לפי סטוקס

$$\oint_L \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S \overline{\nabla} \times \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma.$$

עבור S ניקח את הפרמטריזציה הסטנדרטית

$$\overline{r}(x,y) = (x,y,x),\ x^2 + y^2 \leq 5, \quad \overline{r}'_x(x,y) \times \overline{r}'_y(x,y) = (-1,0,1).$$

פרמטריזציה זו תואמת את האוריינטציה הנתונה על S. בנוסף

$$\overline{\nabla} \times \overline{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-x^2} - y + 2z & 3x + \cos\left(y^2\right) + 4z & 2x - y + \arctan z^2 \end{pmatrix} = (-5,0,4).$$

לכן

$$\oint_L \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S \overline{\nabla} \times \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 5} (-5,0,4) \cdot (-1,0,1) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 5} 9 dxdy = 45\pi.$$